Adı Soyadı:
Numarası:
Grubu:
İmza:

1	2	3	4	5	6	7	8	Toplam

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ MATEMATİK BÖLÜMÜ

2020-2021 EĞİTİM ÖĞRETİM YILI MAT 211 ANALİZ III (1. VE 2. GRUP) ARASINAV SORULARI

1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (k^2+k)}{4k^2+5k-1}$ serisinin karakterini inceleyiniz.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+1}{n(n+2)}$ serisi mutlak yakınsak mıdır? Yakınsak mıdır? Neden?

3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{x^k}$ serisi hangi x ler için yakınsak, hangi x ler için ıraksaktır?

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+n-1)(a+n)}$ serisinin toplamını bulunuz.

5) $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ integralini hesaplayınız.

6) Her $a<b$ için $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^p} dx$ integralinin bir has olmayan integral olduğunu belirleyiniz ve p nin hangi değerleri için yakınsak veya ıraksak olduğunu ispatlayınız.

7) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$ integralinin bir has olmayan integral olduğunu belirleyiniz ve değerini bulunuz.

8) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ yakınsak iki seri ise $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)$ serisinin yakınsak olduğunu serilerin yakınsaklığı tanımını kullanarak ispatlayınız.

Not: Sadece 6 soru cevaplayınız. Sorular eşit puanlıdır. Süre 100 dakikadır. Başarılar

Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR, Prof. Dr. Cenap DUYAR

1/

ANALİZ III (1. ve 2. Grup) ARASINAV CEVAPLARI

① $a_n = \dfrac{(-1)^n \cdot (n^2+n)}{4n^2+5k-1} \Rightarrow \left\{ \quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} -1/4 & , n \text{ tek ise} \\ 1/4 & , n \text{ çift ise} \end{cases} \right.$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ old. $\sum a_n$ ıraksaktır.

② $\sum (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{n+1}{n(n+2)}$ Alterne seridir.

$a_n = \dfrac{n+1}{n(n+2)}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ve (a_n) azalan olup

Leibnitz testine göre verilen seri yakınsaktır.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{n+1}{n(n+2)} \right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{n(n+2)}$ olup,

$a_n = \dfrac{n+1}{n(n+2)}$, $b_n = \dfrac{1}{n}$, Bölüm Testi uygulanırsa

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{n+1}{n(n+2)}}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n+2} = 1 \neq 0$ olduğundan

verilen seri mutlak yakınsak değildir.

③ $a_k = \dfrac{k^2}{x^k}$, $\lim\limits_{k\to\infty} \left| \dfrac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim\limits_{k\to\infty} \left| \dfrac{(k+1)^2}{x^{k+1}} \cdot \dfrac{x^k}{k^2} \right| = \lim\limits_{k\to\infty} \left(\dfrac{k+1}{k}\right)^2 \cdot \dfrac{1}{|x|}$

$= \dfrac{1}{|x|}$

Oran testine göre,

O zaman seri $\dfrac{1}{|x|} > 1$ için ıraksak, $\dfrac{1}{|x|} < 1$ için yakınsak,

$|x| = 1$ için sonuç yok. $|x| = 1 \Leftrightarrow x = \mp 1$, $\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{k^2}{x^k} \neq 0$ old.

$|x| = 1$ yani $x = \mp 1$ için $\sum \dfrac{k^2}{x^k}$ serisi ıraksaktır.

Sonuç olarak

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{x^k} = \begin{cases} \text{yakınsak}, & |x| > 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty) \text{ ise} \\ \text{ıraksak}, & |x| \leq 1 \Leftrightarrow x \in [-1,1] - \{0\} \end{cases}$$

2/

④ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+n-1)(a+n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{a+n-1} - \frac{1}{a+n}\right]$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{a+k-1} - \frac{1}{a+k}\right] = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+2} + \dots + \frac{1}{a+n-1} - \frac{1}{a+n}$

$= \frac{1}{a} - \frac{1}{a+n}$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+n}\right) = \frac{1}{a}$ old. seri yakınsaktır ve

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+n-1)(a+n)} = \frac{1}{a}$ dır.

⑤ $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx : I \lim_{b\to 1^-} \left(\frac{1}{2}(\arcsin x)^2 \Big|_0^b\right) = \frac{1}{2}\lim_{b\to 1^-} (\arcsin b)^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{4} = \pi^2/8$

integral yakınsak olup, değeri $\pi^2/8$ dır.

$\left(\begin{array}{l} u = \arcsin x \\ du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{array}\right)$ $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + c = \frac{(\arcsin x)^2}{2}$

⑥ Eğer $p \leq 0$ ise $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ bir has integraldir.

Eğer $p>0$ ise $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ bir has olmayan integraldir, çünkü $\lim_{x\to b^-} \frac{1}{(b-x)^p} = \infty$

olduğundan $x=b$ tek singüler noktadır.

$p=1$ için $\int_a^b \frac{dx}{b-x} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{b-x} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[-\ln(b-x)\Big|_a^{b-\varepsilon}\right] = \lim_{\varepsilon\to 0}[-\ln\varepsilon + \ln(b-a)] = \infty$

olduğundan $\int_a^b \frac{dx}{b-x}$ ıraksaktır.

$0<p\neq 1$ için $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} (b-x)^{-p} dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\frac{(b-x)^{-p+1}}{-p+1}\Big|_a^{b-\varepsilon}\right]$

$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\frac{\varepsilon^{-p+1}}{-p+1} - \frac{(b-a)^{-p+1}}{-p+1}\right] = \begin{cases} \frac{(b-a)^{-p+1}}{p-1}, & 0<p<1 \\ -\infty, & p>1 \end{cases}$

olduğundan $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ integral $0<p<1$ olduğunda yakınsak iken $p>1$ olduğunda ıraksaktır.

Sonuç olarak $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ has olmayan integrali $p<1$ iken yakınsak, $p\geq 1$ iken ıraksaktır.

⑦ $f(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$ integrallenen fonksiyonu için $x=0$ bir singuler noktadır, çünkü

$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} = \infty$ olduğundan $x=0$ ın sağ civarında sınırsızdır.

Önce $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$ belirsiz integralini hesaplayalım:

3/

$x=t^2$ dönüşümü yapılırsa, $\sqrt{x}=t$ ve $dx=2t\,dt$ olacağından,

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = \int \frac{2t\,dt}{(t^2+1)t} = 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2\arctan t + c$$
$$= 2\arctan\sqrt{x} + c$$

bulunur.

Şimdi integrale geçelim.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} + \int_1^\infty \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$$

olmak üzere integrali parçalayalım. Sağdaki ilk integral bir 2. tür has olmayan integral iken, diğeri 1. tür has olmayan integraldir.

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[2\arctan\sqrt{x}\,\Big|_\varepsilon^1\right]$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} [2\arctan 1 - 2\arctan\sqrt{\varepsilon}] = 2\arctan(1) - 2\arctan(0)$$
$$= 2\cdot\frac{\pi}{4} - 2\cdot 0 = \frac{\pi}{2}$$

olduğundan $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$ integrali yakınsak ve $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = \pi/2$ dir.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = \lim_{b\to\infty} \left[\arctan\sqrt{x}\,\Big|_1^b\right]$$
$$= \lim_{b\to\infty} [\arctan\sqrt{b} - \arctan 1] = \arctan\infty - \arctan 1$$
$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

olduğundan $\int_1^\infty \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$ integrali yakınsak ve $\int_1^\infty \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = \frac{\pi}{4}$ olur.

Sonuç olarak $\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$ integrali yakınsak ve $\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ olur.

8. $\sum a_n$ ve $\sum b_n$ serilerinin kısmi toplamlar dizileri, sırasıyla (s_n) ve (t_n) olsun. Seriler yakınsak olduğuna göre $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ ve $\lim_{n\to\infty} t_n = t$ olacak şekilde s ve t sayıları vardır.

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ serisinin kısmi toplamlar dizisi (u_n) olsun.

O zaman $u_n = (a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\dots+(a_n+b_n) = s_n+t_n$

olacağından $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(s_n+t_n) = \lim_{n\to\infty} s_n + \lim_{n\to\infty} t_n = s+t$

olur, buna göre $\sum(a_n+b_n)$ serisi yakınsak ve $\sum(a_n+b_n)=s+t$ dir.